Université Abdelmalek Éssaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 — Année: 2019/2020

TD:Suites et Séries de Fonctions

séries N°3(Partie 1)

Professeur A. MOUSSAID

Exercice 1
Etudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer, dans chaque cas la fonction, limite simple de ces suites:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{nx+2}{1+nx^2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_n(x) = n\ln(1+\frac{x}{n})$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$
5. $\forall x \in [0,2] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

Exercice 2
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par:

$$\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^7}$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas Uniformément sur $[0,1]$

Exercice 3
Soit α un réel.
Discuter suivant les valeurs de α la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par:

$$f_n(x) = 0 \quad si \quad x \neq 0, \qquad f_n(n) = n^\alpha$$

Exercice 4
Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0,1]$ par:

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 5
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonction définies sur $[0,1]$ par:

$$f_n(x) = x^n$$

1. *Montrer que cette suite converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ avec $a<1$*
2. *Étudier la convergence uniforme de ctte suite sur $[0,1[$*

Exercice 6
Pour tout réel x et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$$

1. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, mais ne convege pas uniformément.*

2. *Soit* g_n *le restriction de* f_n *à l'intervalle* $[0, +\infty[$.
Étudier la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $[0, +\infty[$.

Exercice 7
On considère la suite de fonctin définies sur $[0, 1]$ *par:*

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$$

1. *Etudier la convegence simple de* (f_n) *sur* $[0, 1]$
2. *Montrer de* (f_n) *converge uniformément sur* $[a, 1]$ *où* $a \in]0, 1[$.
3. *Montrer de* (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0, 1]$ *d'abord en calculant* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$, *ensuite en comparant*

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

Exercice 8
Pour $x \geq 0$ *on pose que* $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$
2. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformémement sur tout intervalle* $[0, a]$ *avec* $a > 0$
3. *Vérifier que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{k^2+n^2} \geq \dfrac{1}{5}$
4. *En déduire que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}^+$
5. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}^+$
6. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$ *converge normalement sur tout intervalle* $[0, a]$ *avec* $a > 0$
7. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$ *ne convergence pas normalement sur* $\mathbb{R}^+$

Exercice 9
Étudier la convergence normale des séries de fonctions de terme général:

1. $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+x^2)}$, $\quad \alpha > 1$, $\quad$ *et* $\quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$
2. $g_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{x^2+n^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
3. $h_n(x) = \frac{1}{n^2+\cos(nx)}$, $\quad n \geq 2 \quad$ *et* $\quad x \in \mathbb{R}$